

Scomposizione in fratti semplici

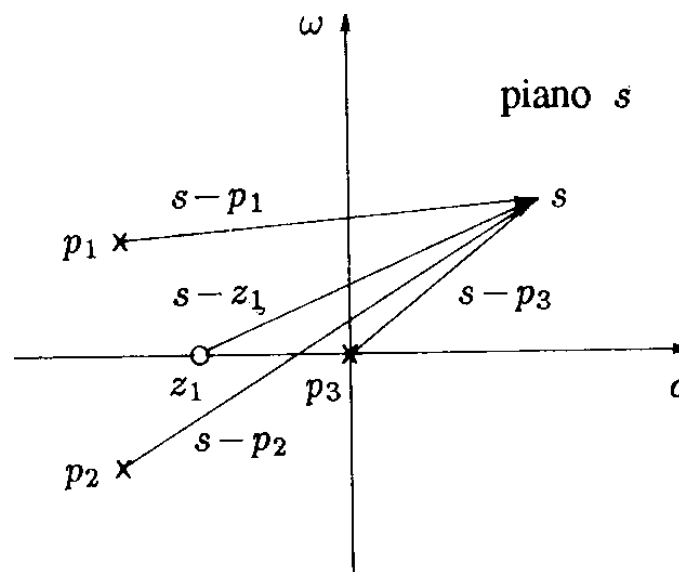
- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiedono l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di questo tipo:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La differenza $r = n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di *grado relativo* della funzione razionale $F(s)$.
- La funzione $F(s)$ può essere *scomposta in fratti semplici* se è strettamente propria, cioè se presenta un grado relativo $r \geq 1$.
- La funzione $F(s)$ può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

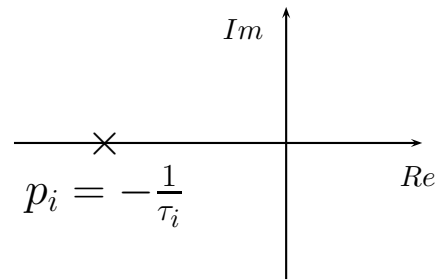
$$F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- Le costanti complesse z_1, \dots, z_m e p_1, \dots, p_n vengono dette, rispettivamente, *zeri* e *poli* della funzione $F(s)$.
- Valutazione grafica della funzione $F(s)$:



- Ad ogni polo reale p_i della funzione $F(s)$ viene associata una costante di tempo τ_i così definita:

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$$



La costante di tempo τ_i è positiva se il polo reale p_i è negativo.

- Un'analoga definizione vale anche per le costanti di tempo τ_j associate agli zeri: $\tau_j = -1/z_j$.
- Nel caso di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ (σ è la parte reale e ω è la parte immaginaria) spesso si utilizza anche la seguente parametrizzazione di "tipo polare":

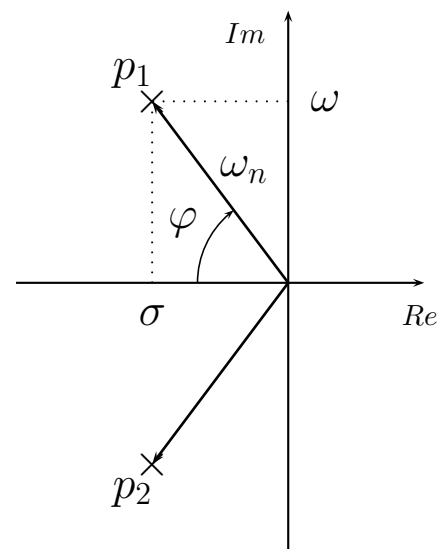
$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \sigma \pm j\omega \\ &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\omega_n \sin\varphi \end{aligned}$$

dove ω_n è detta pulsazione naturale:

$$\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

e δ è detto coefficiente di smorzamento:

$$\delta = \cos\varphi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$



Valgono quindi le relazioni seguenti:

$$\sigma = -\delta\omega_n, \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

- L'utilizzo della parametrizzazione polare (δ, ω_n) risulterà molto utile nello studio temporale e frequenziale dei sistemi dinamici lineari.

- In relazione all'antitrasformazione si distinguono due casi:
 - *i*) tutti i poli sono *semplici*;
 - *ii*) si hanno poli *multipli*.
- Nel caso di poli semplici la funzione può essere scomposta come segue:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

- Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali, complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Esse si ricavano utilizzando la formula:

$$K_i = (s - p_i) \left. \frac{P(s)}{Q(s)} \right|_{s=p_i}$$

- Una volta che la funzione $F(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

- Esempio. Sia

$$F(s) := \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$K_1 = \frac{5(-1) + 3}{(-1 + 2)(-1 + 3)} = -1$$

$$K_2 = \frac{5(-2) + 3}{(-2 + 1)(-2 + 3)} = 7$$

$$K_3 = \frac{5(-3) + 3}{(-3 + 1)(-3 + 2)} = -6$$

per cui si può scrivere

$$F(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} - \frac{6}{s + 3}$$

e quindi

$$f(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

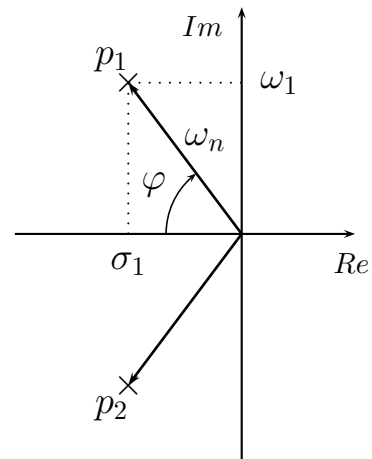
$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \quad p_2 = \sigma_1 - j\omega_1$$

anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + jv_1, \quad K_2 = u_1 - jv_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1}$$



Posto

$$M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg(u_1 + jv_1),$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\omega_1} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2} (e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

oppure

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

Esempio. Sia:

$$F(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$K_1 = \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)(0 + 1 + j2)} = 1$$

$$K_2 = \frac{7(-1 + j2)^2 - 8(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4$$

$$K_3 = \frac{7(-1 - j2)^2 - 8(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10 e^{-t} \cos(2t + \varphi),$$

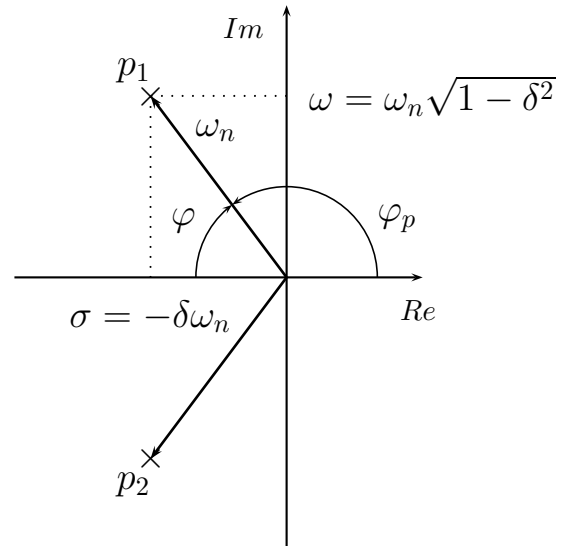
dove $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$ e $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13^\circ$.

Esempio. Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s - \omega_n e^{j\varphi_p})(s - \omega_n e^{-j\varphi_p})} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s - \omega_n e^{j\varphi_p}} + \frac{K_2^*}{s - \omega_n e^{-j\varphi_p}} \end{aligned}$$



dove

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

e

$$\varphi_p = \pi - \varphi = \pi - \arccos \delta$$

Il calcolo dei residui è immediato:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = 1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow \omega_n e^{j\varphi_p}} \frac{\omega_n^2}{s(s - \omega_n e^{-j\varphi_p})} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n e^{j\varphi_p}(\omega_n e^{j\varphi_p} - \omega_n e^{-j\varphi_p})} = \frac{e^{-j\varphi_p}}{2j \sin \varphi_p}$$

Essendo:

$$M_1 = 2|K_2| = \frac{1}{|\sin \varphi_p|} = \frac{1}{|\sin(\pi - \varphi)|} = \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\varphi_1 = \arg K_2 = -\varphi_p - \frac{\pi}{2} = -(\pi - \varphi) - \frac{\pi}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2} = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \frac{\pi}{2}$$

e antitrasformando si ottiene ($\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$):

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + M_1 e^{-\delta\omega_n t} \cos \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi_1 \right] \\ &= 1 + \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cos \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \right] \end{aligned}$$

Antitrasformazione: il caso di poli multipli

- Si suppone che la funzione razionale $F(s)$ abbia h poli distinti p_i ($i = 1, \dots, h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$ ($\sum_{i=1}^h r_i = n$):

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - p_1)^{r_1} (s - p_2)^{r_2} \dots (s - p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{r_i - \ell + 1}}$$

- Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell - 1)!} \left. \frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}} (s - p_i)^{r_i} \frac{P(s)}{Q(s)} \right|_{s=p_i}$$

dove ($i = 1, \dots, h; \ell = 1, \dots, r_i$). Antitrasformando la $F(s)$ si ottiene:

$$f(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}$$

- I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.
- Esempio:

$$F(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)^2} = \frac{K_{11}}{s + 2} + \frac{K_{22}}{s + 1} + \frac{K_{21}}{(s + 1)^2}$$

dove

$$K_{11} = [(s + 2) F(s)] \Big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 F(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s + 2} \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = [(s + 1)^2 F(s)] \Big|_{s=-1} = 1$$

Antitrasformando si ottiene:

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t e^{-t}$$

Sviluppi in somme di fratti semplici

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:

- *i*) se è $n = m + 1$, la somma dei residui di $F(s)$ è $\frac{b_m}{a_n}$;
- *ii*) se è $n \geq m + 2$, la somma dei residui di $F(s)$ è zero.

Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $F(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \frac{C}{s - p_3}$$

Calcolati A e B , il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A + B)$.

- Esempio 2:

$$F(s) = \frac{1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* si deduce: $B = -C$.

- Esempio 3:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)^3 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^3} + \frac{B}{(s - p_1)^2} + \frac{C}{s - p_1} + \frac{D}{s - p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà *ii* si deduce: $C = -D$. Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per $(s - p_1)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + C + D \frac{s - p_1}{s - p_2} \\ &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{E}{s - p_2} \end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

- L'unica difficoltà nell'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.
- Il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all'infinito è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario. Infatti, nel caso di poli semplici si hanno termini (*modi*) del tipo:

$$K, \quad K e^{\sigma t}, \quad K e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

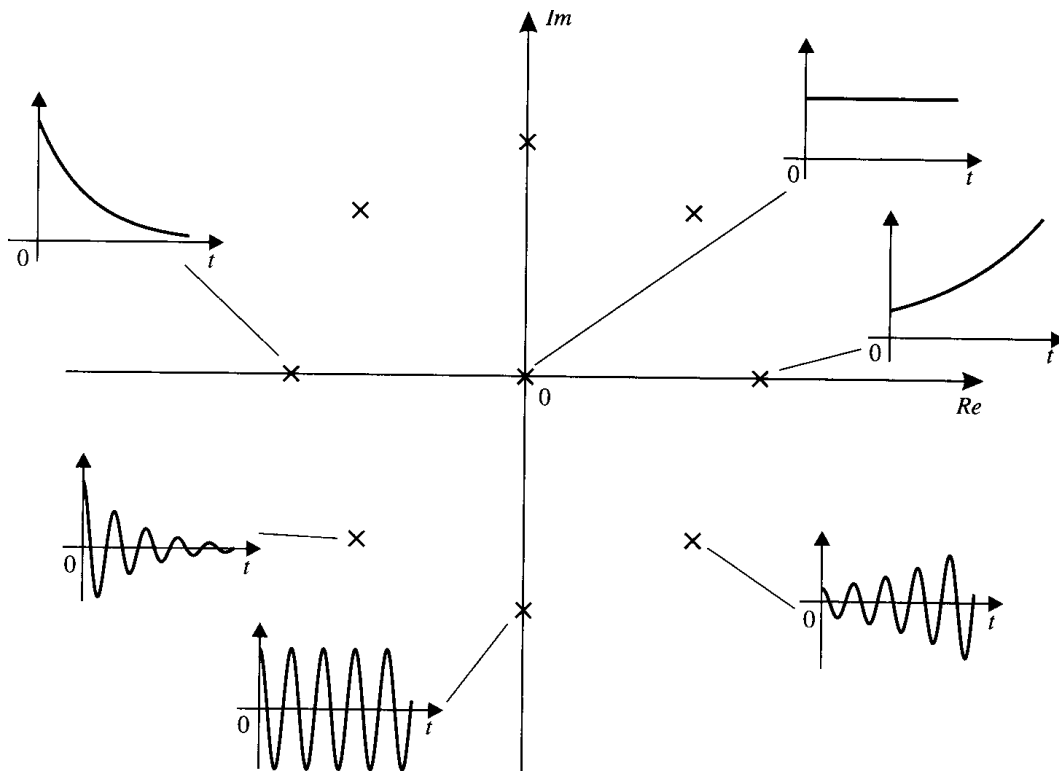
in cui σ e ω sono le parti reale e immaginaria dei poli considerati, mentre nel caso di poli multipli si hanno termini (*modi*) del tipo:

$$K t^h, \quad K t^h e^{\sigma t}, \quad K t^h e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

in cui h è un intero compreso fra l'unità e $r - 1$, essendo r l'ordine di molteplicità dei poli considerati.

- Nel caso di *poli semplici*, i termini tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del relativo polo è negativa, restano limitati se essa è nulla e divergono se essa è positiva.
- Nel caso di *poli multipli*, i termini tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa e divergono se essa è nulla o positiva.
- L'antitrasformata di una funzione razionale fratta rimane limitata se e solo se la funzione da antitrasformare non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici, diverge in caso contrario.
- I poli che caratterizzano la trasformata della risposta del sistema a un segnale di ingresso (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoidale) sono quelli della funzione di trasferimento, più quelli relativi al segnale di ingresso.
- Il *sistema* risulta *stabile* (asintoticamente) quando tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: infatti in tal caso le sue variabili tendono a riacquistare asintoticamente per t tendente all'infinito i valori che avevano prima della perturbazione.

- Modi della risposta nel caso di poli distinti ($r = 1$):



- Modi della risposta nel caso di poli multipli ($r = 2$):

