Forma canonica di Jordan

Siano λ_i, per $i = 1, \ldots, h$, gli autovalori "distinti" della matrice $\mathbf{A}$ e siano r_i i corrispondenti gradi di molteplicità all'interno del *polinomio caratteristico*:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_h)^{r_h}$$

Nella forma canonica di Jordan la matrice $\mathbf{A}$ assume la seguente forma diagonale a blocchi:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{J}_h \end{bmatrix}$$

dove ad ogni autovalore distinto λ_i corrisponde un *blocco di Jordan* $\mathbf{J}_i$ di dimensione pari alla $molteplicità\ algebrica$ r_i dell'autovalore λ_i, cioè pari al grado di molteplicità r_i dell'autovalore all'interno del polinomio caratteristico. A sua volta, ogni blocco di Jordan $\mathbf{J}_i$ ha la struttura di una matrice diagonale a blocchi:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{i,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{J}_{i,q_i} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} dim \mathbf{J}_i = r_i \\ \\ i = 1, \ldots, h \end{array}$$

che presenta sulla diagonale principale un numero q_i di *miniblocchi di Jordan* $\mathbf{J}_{i,j}$ pari alla $molteplicità\ geometrica$ dell'autovalore λ_i, cioè al numero q_i di autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_{i,j}$ associati all'autovalore λ_i. La struttura di tutti i *miniblocchi di Jordan* $\mathbf{J}_{i,j}$ è la seguente:

$$\mathbf{J}_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} dim \mathbf{J}_{i,j} = \nu_{i,j} \\ \\ j = 1, \ldots, q_i \end{array}$$

La dimensione $\nu_{i,j}$ di ciascun *miniblocco di Jordan* $\mathbf{J}_{i,j}$ è pari al dimensione della catena di "autovettori generalizzati" che è possibile determinare a partire dall'autovettore $\mathbf{v}_{i,j}$ associato al miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,\,j}$. Valgono le seguenti relazioni:

$$n = \sum_{i=1}^{h} r_i, \qquad\qquad r_i = \sum_{j=1}^{q_i} \nu_{i,j}$$

La dimensione m_i del più grande miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,\,j}$ associato all'autovalore λ_i:

$$m_i = \max_j \nu_{i,j}$$

è pari al grado di molteplicità m_i dell'autovalore λ_i all'interno del <u>polinomio minimo</u> $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \; \ldots (\lambda - \lambda_h)^{m_h}$$

Essendo $m_i \leq r_i$, chiaramente il grado del polinomio minimo è sempre inferiore o uguale al grado del polinomio caratteristico.

Un caso particolare della forma canonica di Jordan si ha quando la matrice trasformata $\overline{\mathbf{A}}$ è diagonale. In questo caso di dice che la matrice $\mathbf{A}$ di partenza era "diagonalizzabile".

Condizioni di diagonalizzabilità di una matrice

Una matrice $\mathbf{A}$ di ordine n è diagonalizzabile se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni:

- Se esistono n autovettori linearmente indipendenti;
- Se la molteplicità algebrica r_i di ciascun autovalore λ_i è uguale alla molteplicità geometrica m_i;
- Se la dimensione $\nu_{i,j}$ di tutti i miniblocchi di Jordan $\mathbf{J}_{i,j}$ è unitaria;
- Se, per ciascun autovalore λ_i, la dimensione m_i del più grande miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,j}$ è unitaria;
- Se il grado di molteplicità m_i di ciascun autovalore λ_i all'interno del polinomio minimo $m(\lambda)$ è unitario;

Autovettori generalizzati

I q_i autovettori distinti $\mathbf{v}_{i,j}$ associati all'autovalore λ_i si determinano risolvendo il seguente sistema lineare autonomo:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_{i,j} = 0 \qquad\qquad j = 1,\ \ldots,\ q_i$$

Infatti, il numero degli autovettori distinti è q_i, pari al numero di miniblocchi $\mathbf{J}_{i,j}$ presenti all'interno del blocco di Jordan $\mathbf{J}_i$. Nel caso in cui si abbia $q_i < r_i$, il numero degli autovettori non è sufficiente per diagonalizzare la matrice, per cui occorre procedere, per ogni autovettore $\mathbf{v}_{i,j}$, alla determinazione della corrispondente *catena* $\mathbf{v}_{i,j}^{(k)}$ *di autovettori generalizzati*, $k = 1,\ \ldots,\ \nu_{i,j}$. Tali catene si determinano risolvendo "iterativamente" il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_{i,j}^{(2)} & = \ \mathbf{v}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{v}_{i,j} \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_{i,j}^{(3)} & = \ \mathbf{v}_{i,j}^{(2)} \\ \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_{i,j}^{(\nu_{i,j})} & = \ \mathbf{v}_{i,j}^{(\nu_{i,j}-1)} \end{cases}$$

Noto $\mathbf{v}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{v}_{i,j}$, dalla prima equazione si ricava $\mathbf{v}_{i,j}^{(2)}$, il quale, sostituito nell'equazione successiva permette di determinare l'autovettore $\mathbf{v}_{i,j}^{(3)}$, ... e così via. La particolare struttura "quasi diagonale" del miniblocco di Jordan $\mathbf{J}_{i,j}$ si ottiene inserendo tra le colonne della matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ queste catene di autovettori generalizzati

$$\mathbf{T} = \Big[\ \ldots \Big|\, \mathbf{v}_{i,j}^{(1)} \ \ \mathbf{v}_{i,j}^{(2)} \ \ \ldots \ \ \mathbf{v}_{i,j}^{(\nu_{i,j})} \,\Big| \ldots\ \Big]$$

Possiamo ora riscrivere l'evoluzione libera di un sistema discreto nel modo seguente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = (\mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1})^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_h \end{bmatrix}^k \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_h^k \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0
\end{aligned}
$$

e l'evoluzione libera di un sistema continuo nel modo seguente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}e^{\overline{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{T}e^{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_h \end{bmatrix}t} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{J}_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\mathbf{J}_h t} \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0
\end{aligned}
$$

Quindi, per poter calcolare la potenza e l'esponenziale di matrice generica $\mathbf{A}$ è sufficiente saper calcolare la potenza e l'esponenziale del seguente generico miniblocco di Jordan di dimensione ν:

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}
$$

Chiaramente, la matrice $\mathbf{J}$ può essere espressa come somma della matrice diagonale $\lambda\mathbf{I}$ e di una matrice $\mathbf{N}$ che ha elementi non nulli, e unitari, solo sulla prima sovradiagonale. Per esempio, nel caso $\nu = 5$ si ha:

$$
\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Le potenze della matrice $\mathbf{N}$ hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots$$

cioè, la matrice $\mathbf{N}^k$ ha elementi non nulli solo sulla k-esima sovradiagonale. La matrice $\mathbf{N}$ è quindi una matrice *nilpotente* di ordine ν:

$$\mathbf{N}^\nu = 0 \qquad \text{dove} \qquad \nu = dim\mathbf{N}$$

La potenza k-esima della matrice $\mathbf{J}$ ha quindi la forma seguente:

$$\mathbf{J}^k = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N})^k = \lambda^k\mathbf{I} + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}\mathbf{N} + \binom{k}{2}\lambda^{k-2}\mathbf{N}^2 + \ldots + \mathbf{N}^k$$

Sappiamo però che tutte le potenze $\mathbf{N}^h$ sono nulle per $h \geq \nu$, per cui si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^k &= (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N})^k \\
&= \lambda^k\mathbf{I} + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}\mathbf{N} + \binom{k}{2}\lambda^{k-2}\mathbf{N}^2 + \ldots + \binom{k}{\nu-1}\lambda^{k-\nu+1}\mathbf{N}^{\nu-1} \\
&= \begin{bmatrix}
\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \ldots & \binom{k}{\nu-2}\lambda^{k-\nu+2} & \binom{k}{\nu-1}\lambda^{k-\nu+1} \\
0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ldots & \vdots & \binom{k}{\nu-2}\lambda^{k-\nu+2} \\
0 & 0 & \lambda^k & \ldots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^k
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Con il simbolo $\binom{k}{h}$ si è indicato il coefficiente binomiale

$$\binom{k}{h} = \frac{k(k-1)\ldots(k-h+1)}{h!}$$

che rappresenta il numero di combinazioni di k oggetti presi a gruppi di h.

Relativamente al caso tempo-continuo, l'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{J}t}$ si calcola nel modo seguente

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{J}t} &= e^{(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{N})t} = e^{\lambda\mathbf{I}t}e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t}\mathbf{I}e^{\mathbf{N}t} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{N}^n = e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{t^n}{n!}\mathbf{N}^n \\
&= e^{\lambda t}\left[\mathbf{I}+t\mathbf{N}+\tfrac{t^2}{2}\mathbf{N}^2+\ldots+\tfrac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\mathbf{N}^{nu-1}\right] \\
&= e^{\lambda t}\begin{bmatrix}
1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \ldots & \frac{t^{\nu-2}}{(\nu-2)!} & \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\
0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \vdots & \frac{t^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \\
0 & 0 & 1 & t & \ldots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & +\ldots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Alla forma "quasi diagonale" sopra mostrata si giunge sempre, anche nel caso di autovalori λ_i complessi coniugati. In questo caso però anche i corrispondenti autovettori $\mathbf{v}_{1,2}$ sono complessi coniugati e la forma diagonale della matrice $\overline{\mathbf{A}}$ a cui si giunge, essendo complessa, risulta essere di "problematica" utilizzazione. Per ovviare a questo inconveniente, nel caso di autovalori λ_i complessi coniugati si preferisce utilizzare una trasformazione nello spazio degli stati che porti la matrice $\mathbf{A}$ ad avere sulla diagonale principale dei blocchi "reali" di dimensione 2.

Si faccia per esempio riferimento ad una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione 6 caratterizzata da due autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2}$ con grado di molteplicità 3 nel polinomio minimo:

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega, \qquad m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)^3 = [(\lambda-\sigma)^2+\omega^2]^3$$

Applicando la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad\qquad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1^* & \mathbf{v}_2^* & \mathbf{v}_3^* \end{array}\right]$$

si giunge alla seguente forma diagonale:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^* \end{array}\right]$$

Si ottengono cioè due soli blocchi di Jordan, ognuno dei quali è composto da un solo miniblocco a 3 dimensioni. Si indichi con $\mathbf{v}_{i,R}$ e $\mathbf{v}_{i,I}$, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria dell'autovettore complesso i-esimo $(i = 1,\, 2,\, 3)$. Utilizzando la seguente trasformazione di coordinate:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}}, \qquad\qquad \tilde{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{v}_{1,R} & \mathbf{v}_{1,I} & \mathbf{v}_{2,R} & \mathbf{v}_{2,I} & \mathbf{v}_{3,R} & \mathbf{v}_{3,I} \end{array}\right]$$

è possibile trasformare la matrice $\mathbf{A}$ nel modo seguente

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

In questo modo l'evoluzione libera di sistemi lineari potrà essere espressa come combinazione lineare di soli termini reali.
Caso tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{A}}^k\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Caso tempo continuo:

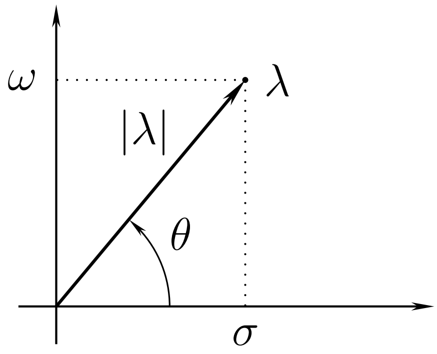
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{T}}e^{\tilde{\mathbf{A}}t}\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Nel caso tempo *discreto*, se si indica con $|\lambda|$ e θ, rispettivamente, il modulo e la fase del numero complesso $\lambda_i = \sigma + j\omega$, e con $\mathbf{j}$ la seguente matrice emisimmetrica

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{\omega}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \sigma + j\,\omega = |\lambda| e^{j\theta} \\ &= |\lambda| \cos\theta + j|\lambda| \sin\theta \end{aligned}$$



allora si ha che

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = |\lambda| e^{\theta \mathbf{j}}$$

e quindi la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ può essere espressa nella forma

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} |\lambda| e^{\theta\mathbf{j}} & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & |\lambda| e^{\theta\mathbf{j}} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & |\lambda| e^{\theta\mathbf{j}} \end{bmatrix}$$

La potenza k-esima della matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ è ha la forma seguente

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = \begin{bmatrix} |\lambda|^k e^{k\theta\mathbf{j}} & k|\lambda|^{k-1} e^{(k-1)\theta\mathbf{j}} & \frac{k(k-1)}{2} |\lambda|^{k-2} e^{(k-2)\theta\mathbf{j}} \\ 0 & |\lambda|^k e^{k\theta\mathbf{j}} & k|\lambda|^{k-1} e^{(k-1)\theta\mathbf{j}} \\ 0 & 0 & |\lambda|^k e^{k\theta\mathbf{j}} \end{bmatrix}$$

cioè

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = \begin{bmatrix} |\lambda|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} & k|\lambda|^{k-1} \begin{bmatrix} \cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta \\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{bmatrix} & \frac{k(k-1)}{2} |\lambda|^{k-2} \begin{bmatrix} \cos(k-2)\theta & \sin(k-2)\theta \\ -\sin(k-2)\theta & \cos(k-2)\theta \end{bmatrix} \\ 0 & |\lambda|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} & k|\lambda|^{k-1} \begin{bmatrix} \cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta \\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & |\lambda|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Nel caso di sistemi tempo continui, per calcolare agevolmente l'esponenziale $e^{\tilde{\mathbf{A}}t}$ è bene utilizzare il seguente formalismo:

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \sigma\mathbf{I} + \omega\mathbf{j}$$

La matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ assume la forma

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{I} + \omega\mathbf{j} & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma\mathbf{I} + \omega\mathbf{j} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \sigma\mathbf{I} + \omega\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

Le matrici $\mathbf{I}$ e $\mathbf{j}$ commutano tra di loro per cui

$$e^{(\sigma\mathbf{I}+\omega\mathbf{j})t} = e^{\sigma t\mathbf{I}} e^{\omega t\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

Quindi si ricava che

$$e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} e^{\omega t\mathbf{j}} & te^{\omega t\mathbf{j}} & \frac{t^2}{2}e^{\omega t\mathbf{j}} \\ 0 & e^{\omega t\mathbf{j}} & e^{\omega t\mathbf{j}} \\ 0 & 0 & e^{\omega t\mathbf{j}} \end{bmatrix} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & t\mathbf{I} & \frac{t^2}{2}\mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & t\mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t & te^{\sigma t}\sin\omega t & \frac{t^2}{2}e^{\sigma t}\cos\omega t & \frac{t^2}{2}e^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & -te^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t & -\frac{t^2}{2}e^{\sigma t}\sin\omega t & \frac{t^2}{2}e^{\sigma t}\cos\omega t \\ \hline 0 & 0 & e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t & te^{\sigma t}\sin\omega t \\ 0 & 0 & -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & -te^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t \end{array}\right]$$

- <u>Esempio</u>. Calcolare l'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{j}\alpha}$:

$$\mathbf{j}\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad e^{\mathbf{j}\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{j}\alpha$ è:

$$\Delta_{\mathbf{j}\alpha}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{j}\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \alpha^2) = (\lambda - j\alpha)(\lambda + j\alpha)$$

L'autovettore $\mathbf{v}_1$ corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = j\alpha$ è:

$$(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{j}\alpha)\mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} j\alpha & -\alpha \\ \alpha & j\alpha \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

L'autovettore $\mathbf{v}_2$ corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = -j\alpha$ è il complesso coniugato dell'autovettore $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ che porta la matrice $\mathbf{j}\alpha$ in forma canonica di Jordan è:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

L'esponenziale di matrice cercato può quindi essere espresso nel modo seguente:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{j}\alpha} &= \mathbf{T} e^{\begin{bmatrix} j\alpha & 0 \\ 0 & -j\alpha \end{bmatrix}} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2j} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} & \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} \\ -\frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} & \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio. Dato il seguente sistema dinamico

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determinare l'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ del sistema a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. La soluzione formale del problema è la seguente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}e^{\overline{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

dove $\mathbf{T}$ è la matrice di trasformazione che "diagonalizza" la matrice $\mathbf{A}$. Per determinare $\mathbf{T}$ occorre calcolare gli autovalori e gli autovettori di $\mathbf{A}$.

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ -2 & s-1 & -1 \\ -1 & 1 & s-2 \end{vmatrix} = s(s^2 - 4s + 5) = s[(s-2)^2 + 1)]$$

Gli autovalori sono $s_{1,2} = 2 \pm j$ e $s_3 = 0$. L'autovettore complesso $\mathbf{v}_1$ corrispondente all'autovalore $s_1 = 2 + j$ è il seguente:

$$(s_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \mathbf{o} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+j & 0 & -1 \\ -2 & 1+j & -1 \\ -1 & 1 & j \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{o} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-j \\ 1+j \end{bmatrix}$$

L'autovettore reale $\mathbf{v}_3$ corrispondente all'autovalore $s_1 = 0$ è:

$$(\mathbf{A} - s_1\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{o} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{o} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La seguente matrice di trasformazione $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_{1,R} & \mathbf{v}_{1,I} & \mathbf{v}_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

porta la matrice $\mathbf{A}$ nella forma canonica "reale" di Jordan:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

L'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ del sistema a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ è quindi la seguente:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\left[\begin{array}{cc|c} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t & 0 \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$